Modèle d'une tornade.

On modélise une tornade comme un écoulement permanent d'air avec un axe de symétrie de révolution vertical Oz et un champ de vitesse orthoradial invariant par rotation et translation selon Oz, on note donc $\overrightarrow{v} = v(r)\,\overrightarrow{e_\theta}$. En dehors d'un cylindre d'axe Oz et de rayon a, l'écoulement est irrotationnel ; à l'intérieur de ce cylindre, le rotationnel du champ de vitesse est uniforme et parallèle à Oz, on note donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = 2\,\Omega\,\overrightarrow{e_z}$. (Bien sûr, pour une vrai tornade, il y a une zone de transition où le rotationnel décroît progressivement, mais cette zone a une épaisseur faible devant a, ce qui valide notre modèle.)

Question 1 :

Trouver l'expression de $v(r)$, si possible sans utiliser les formules du rotationnel en cylindriques.

On pense au théorème d'Ampère. On calcule la circulation de la vitesse sur un cercle $\mathcal{C}$ d'axe Oz et de rayon r :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \oint_{\mathcal{C}} v(r)\,r\,\mathrm{d}\theta = 2\,\pi\,r\,v(r)$$

et le flux du rotationnel de la vitesse à travers le disque $\mathcal{D}$ de frontière $\mathcal{C}$, soit, si $r < a$

$$\iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\mathcal{D}} 2\,\Omega\,\mathrm{d}S = 2\,\pi\,r^2\,\Omega$$

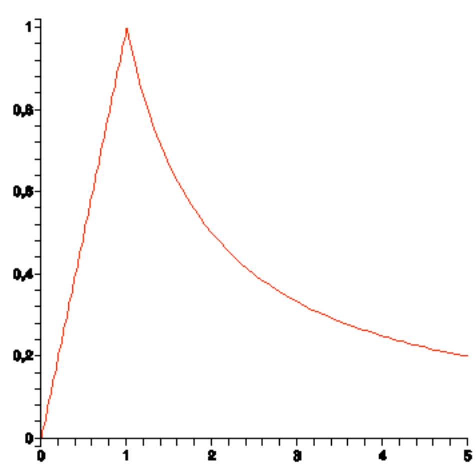
et si $r > a$, puisque le rotationnel est nul en dehors du disque de rayon a :

$$\iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 2\,\pi\,a^2\,\Omega$$

La circulation et le flux qu'on vient de calculer sont égaux de par le théorème de Stokes, donc :

$$v(r) = r\,\Omega \quad \text{si } r < a \qquad \text{et} \qquad v(r) = \frac{a^2\,\Omega}{r} \quad \text{si } r > a$$

La vitesse maximale est obtenue pour $r = a$ et vaut alors $v_{max} = a\,\Omega$. Ci-dessous la courbe donnant $v(r)/v_{max}$ en fonction de r/a. Noter la vitesse nulle en $r = 0$; il s'agit de l'«œil du cyclone».



Question 2 :

En admettant que l'air soit un gaz incompressible, calculer la pression en tout point extérieur au cylindre de rayon a

L'écoulement est permanent, irrotationnel, parfait (l'air est peu visqueux) et le fluide supposé incompressible. Le théorème de Bernoulli généralisé s'applique. On compare le point courant en un point à l'infini ($r \to \infty$ d'où $v(r) \to 0$) au niveau du sol ($z = 0$) et l'on note p_∞ la pression en ce point, donc :

$$\frac{v(r)^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\mu} = \frac{p_\infty}{\mu}$$

$$p = p_\infty - \mu\,g\,z - \mu\,\frac{v(r)^2}{2} = p_\infty - \mu\,g\,z - \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{a^4\,\Omega^2}{r^2}$$

Question 3 :
Calculer la pression en tout point intérieur au cylindre de rayon a

Le théorème de Bernoulli généralisé n'est plus vrai car l'écoulement est rotationnel ; le théorème de Bernoulli simple ne nous estd'aucun secours car il nous apprendrait que la pression est la même en tout point d'une ligne de courant, c'est-à-dire d'une cercle d'axe Oz, ce qu'on savait déjà par un simple raisonnnemnt par symétrie. revenons à l'équation d'Euler. Ici le mouvement de l'air est circulaire à vitesse angulaire constante, donc l'accélération est centipète en $r\,\Omega^2$ donc :

$$\mu\,\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\mu\,r\,\Omega^2\,\overrightarrow{e_r} = \mu\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

on en déduit, en projection sur les axes :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu\,r\,\Omega^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\mu\,g$$

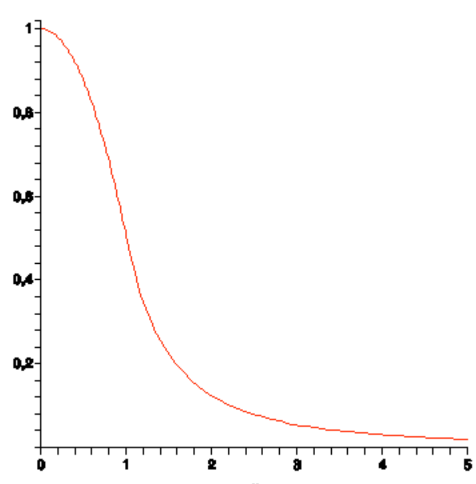
d'où par intégration :

$$p = Cte - \mu\,g\,z + \frac{1}{2}\,\mu\,r^2\,\Omega^2$$

et la constante d'intégration est calculée par continuité en $r = a$:

$$p = p_\infty - \mu\,g\,z + \frac{1}{2}\,\mu\,r^2\,\Omega^2 - \mu\,a^2\,\Omega^2$$

en particulier, la pression au centre ($r = 0$) et au niveau du sol ($z = 0$) est minimale (vis-à-vis de r) et vaut $p_0 = p_\infty - \mu\,a^2\,\Omega^2$. Pour les points au sol ($z = 0$) notons $\Delta p_0 = p_\infty - p_0 = \mu\,a^2\,\Omega^2$, qu'on appelera dépression, et $\Delta p = p_\infty - p$, la courbe donnant $\Delta p / \Delta p_0$ en fonction de r/a est la suivante :



Question 4 :

Calculer la dépression en fonction de la vitesse maximale et de la masse volumique de l'air et faire une application numérique pour un cyclone dont les vitesses maximales soient de 144 km/h. On rappelle que $\mu = 1,3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

$\Delta p_0 = \mu\, a^2\, \Omega^2$ et $v_{max} = a\,\Omega$ donc $\Delta p_0 = \mu\, v_{max}^2$.

avec $v_{max} = 144\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 40\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $\mu = 1,3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, on tire $\Delta p_0 = 2,08\,\mathrm{kPa}$

Cette valeur n'est que de 2 % de la pression moyenne ce qui permet de comprendre pourquoi la pression atmosphérique est peu variable : la moindre inhomogénéité provoque des cyclones cataclismiques.

De plus comme l'atmosphère a un comportement intermédiaire entre l'isotherme ($p/\mu = Cte$) et l'adiabatique ($p/\mu^\gamma = Cte$), μ varie entre 2 et 3 %, ce qui justifie *a posteriori* qu'on a pu considérer, sans grand écart avec la réalité, l'air comme incompressible.